

# 梯形齿同步带应力分布几何非线性有限元分析

西北工业大学 武 聪\* 王 勇 丁渭平 王步瀛

**【摘要】** 从梯形齿同步带的几何非线性问题入手,以弹性平面问题的有限元法解平面应力问题为基础,引入梯形齿同步带的几何非线性有限元解法。用此方法对梯形齿同步带一个齿上的平面问题的应力分布进行了有限元分析研究。最后,通过一个具体算例求出梯形齿同步带一个齿上的最大应力点及应力分布规律并与弹性平面问题的解进行了比较。

**关键词:** 齿轮 应力分布 非线性 有限元分析

**分类号:** TH 132. 41

## 1 前 言

同步带是一种靠带齿与带轮齿的多对齿啮合来传递运动和动力的新型传动带,具有传动功率高、节能、尤其是传动比稳定准确等特点,近年来其应用领域日益广泛。梯形齿同步带的材料特性决定了它本身的应力—应变之间是非线性关系,同时由于同步带在传动过程中已产生了大位移,因此同步带的应变—位移之间也是非线性关系。应该用非线性有限元法求解应力分布,而现有资料中求解同步带的应力分布时,常采用弹性线性有限元法求解<sup>[1]</sup>。本文引入几何非线性有限元解法,并与线性有限元解法进行了比较。本文所用有限元格式为二维平面模型,对同步带传动用平面问题进行分析是一种近似分析。本文只在理论分析时改变常用的线性解法,使同步带的应力分布更接近真实情况,实际应用中的有限元分析及全啮合齿有限元分析有待后续工作进一步完成。另外,同步带在传动过程中每个齿所受载荷是不一样的,进入啮合的第一个齿受力最大,最后一个齿受力最小,各齿载荷分配由参考资料<sup>[2]</sup>确定。

同步带一般由强力层、带背、带齿和齿包布组成,强力层处于带的节线位置,同步带的带背和带齿材料为胶料,在传动中带齿与带轮齿相啮合主要承受剪应力,带背主要承受拉力。因此,带齿胶料要求有足够的抗撕裂强度和抗剪切强度,带背胶料则应具有一定的抗拉强度和屈挠性,并要求带背、带齿胶料和强力层具有足够的粘接强度。同步带的强力层在工作时承受带的拉力,要求它具有抗拉强度、抗疲劳强度高,变形小并与橡胶粘接性能好等性能。同步带属于一种复合材料,同时也是一种粘弹性材料。其力学特性表现为既是材料非线性问题又是几何非线性问题。本文主要讨论同步带的几何非线性问题。

## 2 有限元数学模型

拟以梯形齿同步带进入啮合的第一个齿为研究对象,如图 1 所示,单元格式采用最常用的三角形单元。带齿属于复合材料,有限元分析时应考虑强力层与带背带齿胶料的材料特性。由于强力层材料的弹性模量一般为  $5000 \text{ N/mm}^2$  左右,而带背带齿胶料的弹性模量只有  $10 \text{ N/mm}^2$  左右,因此在有限元分析时,只考虑强力层材料的影响,忽略带背带齿胶料的影响。

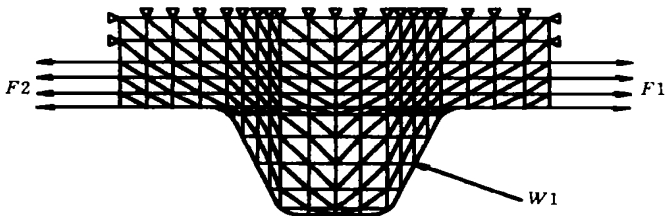


图 1 梯形齿有限元外加载荷及单元划分模型

平面弹性问题有限单元位移法基本方程:

$$[K]\{\delta\} = \{R\} \quad (1)$$

设结构具有初应力 $\{\sigma_0\}$ 和初应变 $\{\epsilon_0\}$ , 则:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon - \{\epsilon_0\}\} + \{\sigma_0\} \quad (2)$$

式中:  $[K]$  为元素刚度矩阵的总刚度矩阵。对于三角形单元  $[K] = \sum_e [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \Delta$ 。 $\Delta$  为三角形的面积,  $\{\delta\}$  为所求各节点的位移,  $\{R\}$  为各节点所加外载荷。

几何非线性问题中的应变-位移之间是非线性关系,当推导应变表达式时,应变分量中将含有节点位移的二次项,此时的单元平衡方程仍可写成如下形式:

$$[K]^e \cdot \{\delta\}^e = \{R\}^e \quad (3)$$

但(3)式中的  $[K]^e$  已不是一个常数矩阵,在它的各个元素中含有节点位移分量。因此对于一个单元列出的式(3)以及由各单元的式(3)所集成的整个结构的有限元基本方程是个非线性的代数方程组。非线性代数方程组一般采用 Newton-Raphson 法进行迭代求解。为了加快运算速度,也可用修正的 Newton-Raphson 法进行迭代求解。

对于三角形单元组成的集合有下式:

$$F(\{\delta\}) = [K(\{\delta\})] \cdot \{\delta\} - \{R\} \quad (4)$$

$$\text{式中: } [K(\{\delta\})] = \sum_e [B]^T \cdot [D] \cdot [\tilde{B}] \cdot \Delta \quad (5)$$

公式(5)中的矩阵  $[B]$  和  $[\tilde{B}]$  都称为应变矩阵,而且都是  $\{\delta\}$  的函数。这一点与线性解不一样,这里的矩阵  $[B]$  与 2.1 节中的矩阵的取值也不一样。所以公式(4)是一个非线性方程组,而且矩阵  $[K(\{\delta\})]$  是非对称的。公式(5)中的应变矩阵  $[B]$  和  $[\tilde{B}]$  的表达式如下:  $[B] = [B_L] + [B_N]$ ,  $[\tilde{B}] = [B_L] + [\tilde{B}_N]$ ; 其中: 矩阵  $[B_L]$  称为小位移应变矩阵,与公式(3)中矩阵  $[B]$  的取值是一样的; 矩阵  $[B_N]$  称为大位移应变矩阵,且有  $[B_N] = 2 \cdot [\tilde{B}_N]$ 。

几何非线性问题结构的单元切线刚度矩阵表达式如下:

$$[K_T]^e = [K_L]^e + [K_N]^e + [K_S]^e \quad (6)$$

系统结构的切线刚度矩阵  $[K_T]$  是单元切线刚度矩阵  $[K_T]^e$  的集合。  $[K_L]^e$  是小位移刚度矩阵,  $[K_N]^e$  称为大位移刚度矩阵,与几何方程中的非线性项有关;  $[K_S]^e$  称为几何刚度矩阵; 对于三角形单元:  $[K_L]^e = [B_L]^T \cdot [D] \cdot [B_L] \cdot \Delta$ ,  $[K_S]^e = [G]^T \cdot [M] \cdot [G] \cdot \Delta$

$$[K_N]^e = ([B_L]^T \cdot [D] \cdot [B_N] + [B_N]^T \cdot [D] \cdot [B_N] + [B_N]^T \cdot [D] \cdot [B_L]) \cdot \Delta$$

通过上述分析可得几何非线性有限元方程的求解步骤如下: (1) 利用弹性线性问题有限元基本方程 $[K_L] \cdot \{\delta\} = \{R\}$ 的线性解 $\{\delta\}^0$ 作为初始迭代的位移值, 将其位移值代入公式(4)中求出 $F(\{\delta\}^0)$ 。(2) 将 $\{\delta\}^0$ 代入 $[K_T]$ 的计算公式中, 求出此时的切线刚度矩阵, 并按下式求得位移的调整值 $\Delta\{\delta\}^1 = -[K_T]^{-1} \cdot F(\{\delta\}^0)$ 。而下一次迭代的位移值为:  $\{\delta\}^1 = \{\delta\}^0 + \Delta\{\delta\}^1$ 。(3) 依次循环迭代, 直到调整值或 $F(\{\delta\}^i)$ 足够小为止。利用上述迭代格式对图 1 所示的梯形齿模型进行有限元应力求解, 可得到一个带齿的几何非线性问题平面应力分布规律。

3 具体算例及结果讨论

用本方法对某梯形齿同步带一个齿的平面应力分布进行了有限元分析计算。该梯形齿同步带的节距为 12.7 mm, 带轮转速为 1200~1800 r/min, 带宽为 19.1 mm, 小带轮齿数选为 18 齿, 节圆直径为 72.77 mm, 外圆直径为 71.39 mm。有限元模型见图 1。利用变形协调条件<sup>[2]</sup>可求出外加载荷 $F_1, F_2, W_1$ , 本算例对模型共划分了 233 个节点, 形成 384 个单元。

由表 1 计算结果可看出: 几何非线性有限元法计算结果受弹性模量和泊松比影响较大, 这说明非线性有限元法初始迭代点的选择对计算结果有影响, 具体计算时应根据实际情况选择合适的弹性模量 $E$ 和泊松比 $\mu$ 。几何非线性有限元法的计算结果比较符合同步带传动的实际

表 1 计算结果(最大应力点均在带齿齿根部)

| 几何非线性有限元模型               |       |                                      | 弹性线性模型                   |       |                                      |
|--------------------------|-------|--------------------------------------|--------------------------|-------|--------------------------------------|
| $E$ (N/mm <sup>2</sup> ) | $\mu$ | $\sigma_{\max}$ (N/mm <sup>2</sup> ) | $E$ (N/mm <sup>2</sup> ) | $\mu$ | $\sigma_{\max}$ (N/mm <sup>2</sup> ) |
| 70000                    | 0.4   | 758.81                               | 70000                    | 0.4   | 778.31                               |
| 70000                    | 0.5   | 762.02                               | 70000                    | 0.5   | 782.55                               |
| 40000                    | 0.4   | 750.87                               | 40000                    | 0.4   | 778.31                               |
| 40000                    | 0.5   | 753.55                               | 40000                    | 0.5   | 782.55                               |

情况, 这是因为从同步带的力学特性以及传动过程中的实际应用规律方面考虑, 橡胶同步带的最大应力值应小于一般将同步带视为弹性线性体时的最大应力值, 表 1 中相同条件下的计算结果符合上述规律。弹性线性有限元模型计算结果不受弹性模量的影响, 受泊松比的影响不大, 符合弹性线性有限元应力计算规律。

采用几何非线性有限元法计算所得的带齿上与带轮接触部分的应力分布规律如图 2 所示, 较好地反映了同步带啮合传动的真实情况。

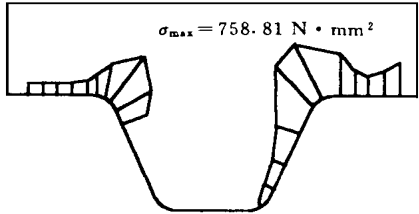


图 2 带齿与带轮接触部分的主应力线分布图

结论 (1) 本文依据同步带的应变-位移之间呈非线性关系的特点, 提出了求解同步带应力分布的几何非线性有限元解法。(2) 通过具体算例, 证实了本文所提算法符合实际应用规律。(3) 几何非线性有限元法求解应力分布对弹性模量和泊松比有一定的要求, 要根据迭代收敛性进行选取。(4) 用几何非线性有限元法求解同步带应力分布时, 忽略材料非线性的影响。

参 考 文 献

1 韩永春等 高速重载新型同步带的齿形研究 哈尔滨工业大学学报, 1987  
2 吴伟光, 陈铁鸣等 梯形齿同步带载荷分配系数 $K_\alpha$ 的确定方法 哈尔滨工业大学学报, 1991

(责任编辑 王震华)

by the former researcher on rubbing of rotor and stator. The vibration characteristics for some types of rubbing for the dual- shaft engine are analyzed and discussed. The theoretical results are consistent with data measured on a dual- shaft aircraft engine.

**Key Words** Double spool jet engines Collisions Vibration analysis

## STRESS ANALYSIS OF TRAPEZOID TOOTH BELT WITH FEM

Wu Cong, Wang Yong, Ding Weiping, Wang Buyang

(Dept. of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

**ABSTRACT** The geometric nonlinearity of synchronous trapezoid tooth belt is taken as the point of departure. A nonlinearity finite element solution of the synchronous belt is provided on the basis of elastic linear finite element method to solve two- dimensional stress distribution problem. The level stress distribution for a tooth of the synchronous belt is researched with help of this method. Finally, for an example, a maximum stress point and stress distributions of a synchronous belt tooth have been found out and compared with its elastic linear solution.

**Key Words** Gears stress Distribution Nonlinearity Finite element analysis

## NUMERICAL PREDICTION OF COLD FLOW FIELD BEHIND EBM C FLAMEHOLDER

Yue Lianjie, Yang Maolin, Huang Yong, Xu Hang

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

**ABSTRACT** A numerical prediction of the cold flow field behind a novel flameholder- Edge Blowing Mixture Curtain (EBM C) in two- Dimension duct was completed by using a modified k-  $\epsilon$  model and S M P L E R method. The influence of the airflow parameters and the flameholder geometrical parameters on the recirculation zone was also studied. The prediction provides basis for designing the novel flameholder and studying its combustion performance.

**Key Words** Aerodynamic stabilization Flame holder Flow field Prediction

## EXPERIMENTAL INVESTIGATION ON EBM C FLAMEHOLDER

Yang Maolin, Quan Zhong, Bai Xingyan, Zhang Pinjie

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

**ABSTRACT** A novel flameholder is presented, as named Edge Blowing Mixture Curtain (EBM C) flameholder. It has a streamline form head, small base width, with air and fuel mixture flowing from the slots at its edges into the main flow. It has small cold pressure loss without reheat and variable blowing on reheat so as to enlarge recirculation zone and improve combustion performance. An experimental investigation of this flameholder was carried